Funtzio baten limitea puntu batean (x-ren balio jakin batean)

1. adibidea:

Eman dezagun $y = f(x) = x^2 + 1$ funtzioaren jokabidea aztertu nahi dugula $x = 1$ balioaren inguruan.

Horretarako, $x = 1$ balioaren ezkerrean dauden balio hurbilak hartuko ditugu kontuan:

x	0	0,9	0,99	0,999	0,9999
$y = f(x) = x^2 + 1$	1	1,81	1,9801	1,998001	1,9998001

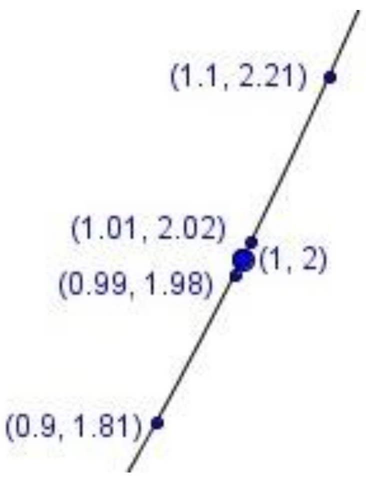
Taulan ikus daitekeenez, 2tik gero eta hurbilago dauden balioak hartzen ditu funtzioak; horregatik, $x = 1$ balioan <u>*ezker-limitea*</u> 2 dela esaten da, eta idazkera matematikoan $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ adierazi.

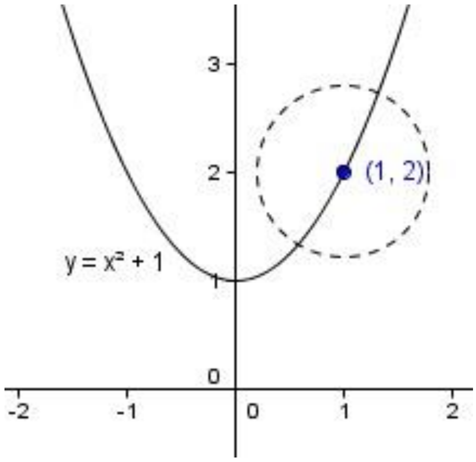
Segidan, $x = 1$ balioaren eskuinean dauden balio hurbilak hartuko ditugu kontuan:

x	2	1,1	1,01	1,001	1,0001
$y = f(x) = x^2 + 1$	5	2,21	2,0201	2,002001	2,00020001

Ikus daitekeenez, 2tik gero eta hurbilago dauden balioak hartzen ditu funtzioak oraingoan ere (baina, kasu honetan, 2 baino handiagoak); hori dela eta, $x = 1$ balioan <u>*eskuin-limitea*</u> 2 dela esaten da:

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$.





Beraz, $x=1$ balioaren alboetan funtzioaren jokabidea berdina denez, esaten da existitzen dela funtzioaren limitea $x=1$ balioan. Honela adierazten da idazkera matematikoa erabilita (goi-indizeak erabili gabe, hain zuzen ere):

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Gainera, **bat datoz limitea eta funtzioak $x=1$ abzisarako hartzen duen balioa**. Goiko grafikoan ikus daitekeenez, eta geroago ikasiko dugun kontzeptua kontuan hartuz, esaten da **funtzioa jarraitua dela $x=1$ balioan**.

2. adibidea:

Orain, azter dezagun $y = f(x) = \begin{cases} x+2 & ; \quad x \le 1 \quad bada \\ x+1 & ; \quad x > 1 \quad bada \end{cases}$ funtzioaren jokabidea $x=1$ balioaren inguruan.

x	0	0,9	0,99	0,999	0,9999
$y = f(x) = x+2$	2	2,9	2,99	2,999	2,9999

Lehen bezala, $x=1$ balioaren ezkerreko balio hurbilak hartuko ditugu kontuan. Haietarako, lehenengo ekuazio zatia aplikatu behar da ($y = x+2$) :

Taulan ikus daitekeenez, 3tik gero eta hurbilagoak diren balioak hartzen ditu funtzioak; hori dela eta, $x=1$ balioan ezker-limitea 3 dela esaten da: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$.

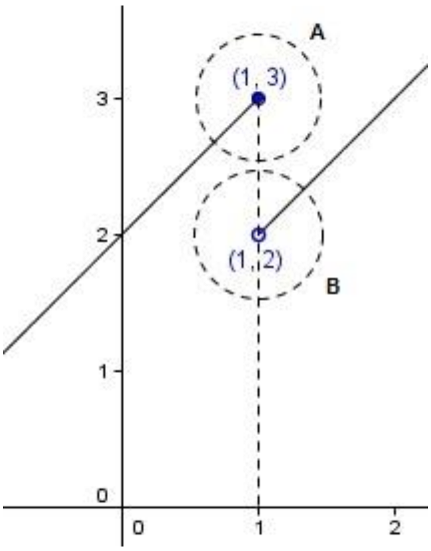
x	2	1,1	1,01	1,001	1,0001

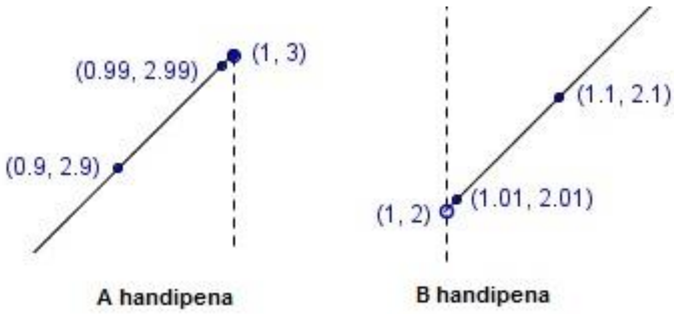
$y = f(x) = x+1$	3	2,1	2,01	2,001	2,0001

Segidan, $x=1$ balioaren eskuinean dauden balio hurbilak hartuko ditugu kontuan. Haietarako, lehen ez bezala, bigarren formula aplikatu behar dugu ($y=x+1$):

Ikus daitekeenez, 2tik gero eta hurbilagoak diren balioak hartzen ditu funtzioak; horregatik, $x=1$ balioan eskuin-limitea 2 dela esaten da: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$.

Kasu honetan, $x=1$ balioan definituta egonda ere, $x=1$ balioaren alboetan funtzioaren jokabidea berdina ez denez, esaten da **funtzioaren limitea ez dela existitzen** $x=1$ **balioan**: $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.





Balio batean **limiterik ez existitzeak ondorio garrantzitsu hau dakar: funtzioa ez dela jarraitua balio horretarako.**

A aldea, handituta	B aldea, handituta

Jarraitutasuna x = c balioko puntuan

$y = f(x)$ funtzioa jarraitua da x = c balioko puntuan **hiru baldintza hauek batera** betetzen badira:

I) Funtzioa definituta egotea x = c baliorako; hau da, $f(c)$ kalkulatu ahal izatea.

II) Funtzioaren joera bakarra eta berdina izatea x = c balioaren alboetan; hau da, alboko limiteak berdinak izatea x = c balioan (beraz, $\lim_{x \to c} f(x)$ existitzea).

III) Funtzioak x = c abzisan hartzen duen balioa eta funtzioaren limitea (edo alboko limiteak) berdinak izatea; hau da: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Zer esanik ez, **hirugarren baldintza betetzeko, lehenengo biak bete behar dira**.

Hala, 1. adibidean, non $y = f(x) = x^2 + 1$ zen, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$ azken baldintza betetzen denez, funtzioa jarraitua da x = 1 balioko puntuan.

Oro har, funtzio polinomikoak eta esponentzialak, non $D = \mathbf{R}$ den (x-ren edozein baliotarako definituta dauden), funtzio jarraituak dira x balio guztietan. Funtzio horiexek aztertuko ditugu gehienbat.

Eten motak

1. **mota**: Eten hauetan, grafikoak jauzi bat egiten du (*aurreko 2. adibidea*).

$$y = f(x) = \begin{cases} x+2 \quad ; \quad x \le 1 \quad bada \\ x+1 \quad ; \quad x > 1 \quad bada \end{cases}$$

Funtzioa badago definituta $x = 1$ balioan, baina limitea ez da existitzen:

- $f(1) = 3$
- $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$