TRIGONOMETRIA

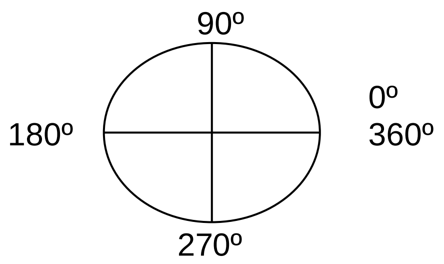
NOLA NEURTZEN DIRA ANGELUAK?

Angeluak neurtzeko, hainbat unitate erabiltzen dira: unitate hirurogeitarrak eta radianak. Lan honetan, unitate horiek eta haien arteko baliokidetasunak aztertuko ditugu.

Gradu hirurogeitarra (º)

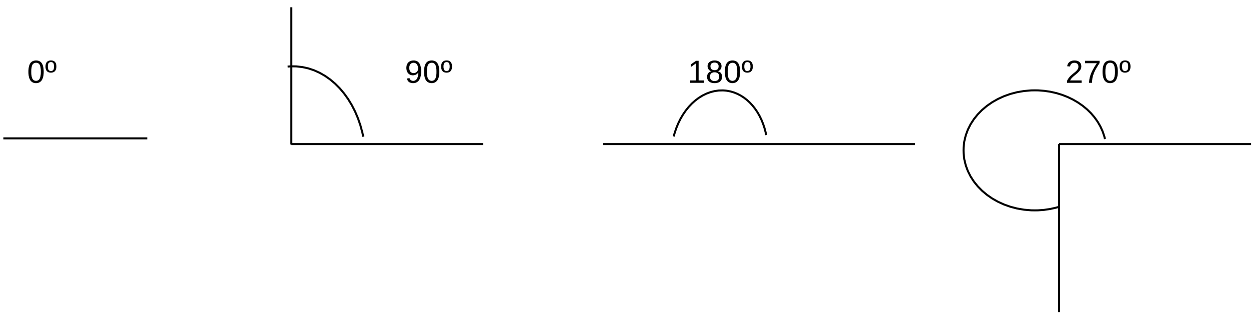
Unitate erabiliena da: angelu osoa (zirkulua) 360 zati berdinetan banatuta lortzen da.

Ondorioz, bira oso bati dagokion angelua 360º-koa izango da.



Irudian, angelu osoa koadrantetan zatitua adierazten da.

Neurri sistema honetan, irudiak erakusten duen bezala, **angelu zuzen** batek 90 gradu ditu (90º).



Graduak bi azpimultiplo ditu: **minutua** eta **segundoa**.

Definizioz:	1º = 60’	(gradu batek 60 minutu ditu).
	1’ = 60’’	(minutu batek 60 segundo ditu).

Ondorioz, angelu baten zabaltasuna honela adieraz daiteke: α = 27º 35’ 22’’; eta honela irakurtzen da: “27 gradu, 35 minutu eta 22 segundo”.

Bestalde, hiruko erregela erabiliz, α angelua gradutan bakarrik adieraz daiteke.

Hona lehen pausoa: 1’ ----------------- 60”
x ----------------- 22”

$$x = \frac{22 \cdot 1}{60} = 0{,}3666'$$

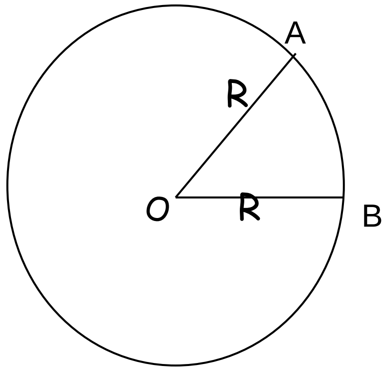
Beraz, $\alpha = 27^{o}\ 35{,}3666'$ (gradu eta minututan adierazita); eta prozedurari jarraituz:

$$\begin{array}{l} 1^{o} ---------- 60' \\ x ---------- 35{,}6666' \quad ;\text{beraz,} \end{array}$$

$$x = \frac{35{,}6666 \cdot 1}{60} = 0{,}5894\ ; \quad \text{ondorioz}: \quad \alpha = 27{,}5894^{o}$$

Radiana

Zientzietan gehien erabiltzen den unitatea da radiana. Ikus dezagun irudia: zirkunferentzian, AB arku bat marraztu dugu, R erradioaren luzera berekoa:



Ikusten dugunez, OAB zirkulu sektorea mugatzen duten aldeek R luzera dute. Kasu honetan, zirkulu-sektoreari dagokion angelua **radian bat** da.

Zenbat radian ditu angelu osoak?

Zirkunferentzia oso baten luzera 2πR denez, ondorioa erraza da: bira oso bati dagokion angelua 2π radian da.

Hiruko erregelaren bitartez froga dezakegu gure arrazonamendua. Honela:

$$\begin{array}{r} 1\ \text{rad} ------------ R \text{ luzerako arkua} \\ \text{angelu osoa} ----------- 2\pi R \text{ luzerako arkua} \end{array}$$

$$\text{Beraz,} \quad \text{angelu osoa} = \frac{1 rad \cdot 2\pi R}{R} = 2\pi\ rad.$$

GOGORATU:

Zirkunferentzia batean, angelu zentral baten neurria radian batekoa da, angeluari dagokion arkuak erradioaren luzera bera badu.

Angelu osoa = 360º = 2π radian.

Gradu hirurogeitarren eta radianen arteko harremanak

Gradu hirurogeitarretik radianetara pasatzeko –eta alderantziz–, honako hau hartu behar dugu kontuan:

2π rad = 360º (edo π rad = 180º)

Unitate batetik bestera pasatzeko, hiruko erregela erabili behar dugu aurreko berdintzan oinarrituta. Adibidez:

a) 90º zenbat radian diren jakiteko, honako hau egingo dugu:

$$180^o ---------- \pi\ rad$$

$$90^o ---------- x\ rad \qquad \text{Hau da}: x = \frac{90^o \cdot \pi\ rad}{180^o} = \frac{\pi}{2}\ rad$$

b) π /3 radian zenbat gradu diren jakiteko:

$$180^o ---------- \pi\ rad$$

$$x ---------- \frac{\pi}{3}\ rad \qquad Hau\ da\ x = \frac{\frac{\pi}{3}\cdot 180}{\pi} = 60^o$$

ARIKETAK

1. Adierazi radianetan angelu hauek:

a) $\alpha = 0$	e) $\alpha = 210^o$	i) $\alpha = 135^o$
b) $\alpha = 30^o$	f) $\alpha = 45^o$	j) $\alpha = 75^o$
c) $\alpha = 60^o$	g) $\alpha = 240^o$	k) $\alpha = 225^o$
d) $\alpha = 150^o$	h) $\alpha = 330^o$	l) $\alpha = 315^o$

2. Adierazi gradu hirurogeitarretan honako angeluak:

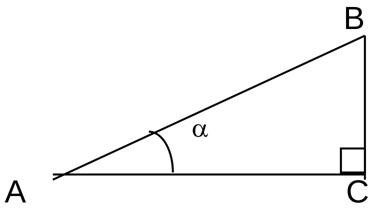
$a)\ \alpha = \frac{\pi}{2}\ rad$	$e)\ \alpha = \frac{2\pi}{3}\ rad$	$i)\ \alpha = \frac{4\pi}{3}\ rad$
$b)\ \alpha = \frac{\pi}{3}\ rad$	$f)\ \alpha = \frac{2\pi}{5}\ rad$	$j)\ \alpha = \frac{\pi}{12}\ rad$
$c)\ \alpha = \frac{\pi}{4}\ rad$	$g)\ \alpha = \frac{\pi}{8}\ rad$	$k)\ \alpha = \frac{\pi}{6}\ rad$
$d)\ \alpha = \frac{\pi}{5}\ rad$	$h)\ \alpha = \frac{3\pi}{4}\ rad$	$l)\ \alpha = \frac{3\pi}{5}\ rad$

3. Adierazi radianetan zenbateko angelua osatzen duten erlojuko orratzek kasu hauetako bakoitzean:
    a) Lauretan.
    b) Bost eta erdietan.
    c) Hamar eta erdietan.

ANGELU ZORROTZ BATEN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

Definizioak

α angelu zorrotzaren gainean ABC triangelu zuzena eraikiko dugu. Hona hemen α angeluaren arrazoi trigonometrikoen definizioak eta eurei dagozkien laburdurak:



$$\alpha\text{-ren sinua} = \frac{\alpha\text{-ren aurkako katetoaren luzera}}{\text{hipotenusaren luzera}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\alpha\text{-ren kosinua} = \frac{\alpha\text{-ren alboko katetoaren luzera}}{\text{hipotenusaren luzera}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\alpha\text{-ren tangentea} = \frac{\alpha\text{-ren aurkako katetoaren luzera}}{\alpha\text{-ren alboko katetoaren luzera}} \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

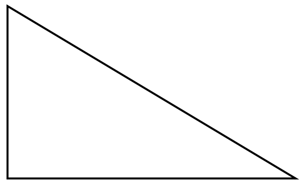
FUNTSEZKO ERLAZIO TRIGONOMETRIKOAK

Angelu berberaren sinuaren, kosinuaren eta tangentearen balioak ez dira askeak, loturik daude: hiruretako bat zenbatekoa den jakinda, beste biak kalkulatu ditzakegu. Honako erlazio hauek elkartzen dituzte (*funtsezko erlazioak* esaten zaie):

$$\boxed{\text{(I)} \quad (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1}$$

Frogapena:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$



$$\boxed{\text{(II)} \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Frogapena:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{BC \cdot AB}{AB \cdot AC} = \frac{BC}{AC} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

ADIBIDEA

Ikus dezagun nola kalkula daitezkeen angelu baten beste bi arrazoi trigonometrikoak arrazoi bat ezagutuz.

1. $\cos\alpha$ = 0,63 dela jakinik, kalkulatu $\sin\alpha$ eta $\mathrm{tg}\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{(I) erabiliz :} \quad & (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \\ & (\sin\alpha)^2 + 0{,}63^2 = 1 \\ & (\sin\alpha)^2 = 1 - 0{,}63^2 \\ & (\sin\alpha)^2 = 0{,}6031 \\ & \sin\alpha = \sqrt{0{,}6031} = 0{,}777 \end{aligned}$$

$$\text{(II) erabiliz :} \quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}63}{0{,}777} = 1{,}23$$

ARIKETAK

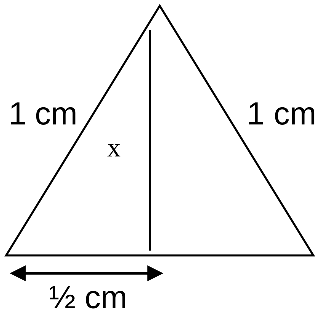
1. sin 37º = 0,6 dela jakinda, kalkulatu cos 37º eta tg 37º.
2. Kalkulatu angelu baten sinua eta tangentea, kosinuak 0,7 balio badu.
3. Kalkulagailua erabiliz, kalkulatu:

sin 10º = cos 10º = tg 10º =
sin 30º = cos 30º = tg 30º =
sin π = cos π = tg π =

ANGELU BATZUEN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

60º-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak

Triangelu aldekide bat hartuko dugu 60º-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak kalkulatzeko, triangelu aldekidearen hiru angeluak 60º-koak direlako:

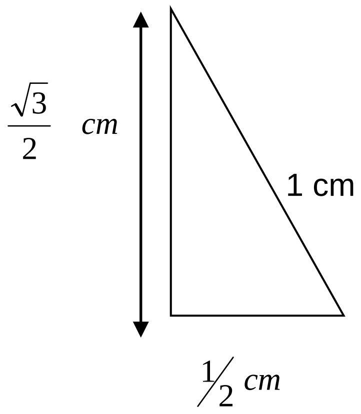


Pitagorasen teorema erabiliz, altuera kalkulatuko dugu:

$$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow \frac{4x^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4} \Rightarrow$$

$$4x^2+1=4 \Rightarrow 4x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

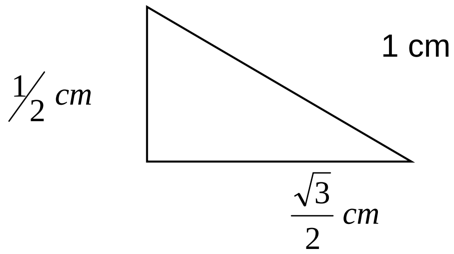
Orain, triangelu aldekidea erdibitu, eta triangelu zuzena geratzen zaigu. Triangelu zuzen horretan, angelu zuzenaz gain, beste bi angelu daude: bata, 60º-koa; eta bestea, 30º-koa.



$$\sin 60^{o}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^{o}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} 60^{o}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

30º-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak

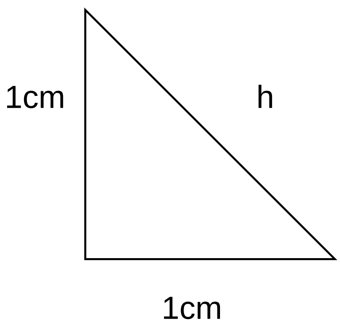
Hasteko, 30º-ko angelua lortu behar dugu. Horretarako, berriz hartuko dugu triangelu aldekidearen erdia (lehen ikusi dugunez, 30º-ko angelua dugu bertan), eta biratu egingo dugu:



$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{tg}\, 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

45º-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak

Bi alde berdin dituen triangelu zuzen bat eraikiko dugu (hala, 45º-koak dira bi angelu zorrotzak):



Pitagorasen teorema erabiliz, hipotenusa kalkulatzeko:

$$h^2 = 1^2 + 1^2$$
$$h^2 = 2$$
$$h = \sqrt{2}$$

Orduan:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

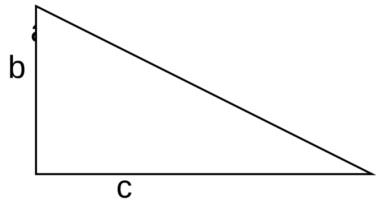
$$\mathrm{tg}\, 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

TRIANGELU ZUZENEN EBAZPENA

Hasteko, triangelu zuzen batean betetzen diren erlazioak gogoratu behar ditugu:

I Bi angelu zorrotzen batura 90º da:

$$\boxed{\alpha + \beta = 90^{\circ}}$$



II Hipotenusaren karratua katetoen karratuen batura da:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

III Arrazoi trigonometrikoak, angeluak aldeekin erlazionatzen dituztenak:

$$\sin\alpha = \frac{\text{aurkako katetoa}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{alboko katetoa}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{aurkako katetoa}}{\text{alboko katetoa}}$$

Triangelu zuzen bat ebaztea da haren elementu guztiak kalkulatzea, ahalik eta elementu gutxien ezaguturik.

Triangelu zuzenak ebaztean aurkituko ditugun kasuak

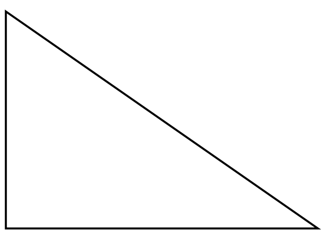
Triangelu zuzenen ebazpenean, lau kasu aurkituko ditugu, triangelua zer elementuren bidez definitzen den:

a) Hipotenusa eta angelu zorrotz bat emanda.
b) Hipotenusa eta kateto bat emanda.
c) Kateto bat eta angelu zorrotz bat emanda.
d) Bi katetoak emanda.

Adibideen bidez aztertuko ditugu lau kasu horiek:

a) Hipotenusa eta angelu zorrotz bat emanda:

Irudiko triangelu zuzenean hipotenusa a = 7 m eta $\beta = 37^{\circ}$ direla jakinda, kalkulatu beste elementuak:



Hasteko:

$\alpha + \beta = 90^{\circ}$ denez $\Longrightarrow$

$$\alpha = 90º - 37º = 53º$$

Orain, b katetoa kalkulatzeko:

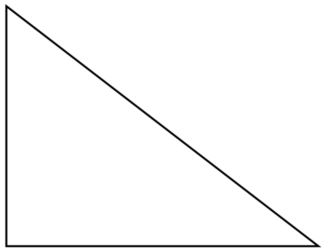
$$sin 53º = \frac{b}{a} = \frac{b}{7} \Rightarrow b = 7 \cdot sin 53º \Rightarrow b = 7 \cdot 0{,}79863551 \Rightarrow b = 5{,}590 \ m$$

c katetoa kalkulatzeko:

$$\cos 53º = \frac{c}{a} = \frac{c}{7} \Rightarrow c = 7 \cdot \cos 53º \Rightarrow c = 7 \cdot 0{,}601815023 \Rightarrow c = 4{,}213 \ m$$

b) Hipotenusa eta kateto bat emanda:

Irudiko triangelu zuzenean hipotenusa a = 8 m eta b = 5 m direla jakinda, kalkulatu beste elementuak:



Hasieran, c katetoa lortzeko, Pitagorasen teorema erabiliko dugu:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$c = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39} = 6{,}245 m$$

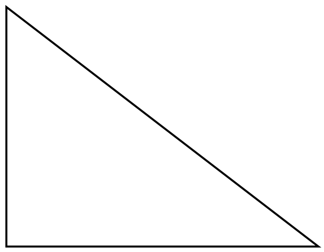
α angelua lortzeko:

$$sin \alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow sin \alpha = 0{,}625 \Rightarrow \alpha = 38{,}68º$$

Eta $\beta = 90º - 38{,}68º = 51{,}32º$

c) Kateto bat eta angelu zorrotz bat emanda:

Irudiko triangelu zuzenean kateto bat b = 4 m eta α = 41º direla jakinda, kalkulatu beste elementuak:



Hasteko:

$$\beta = 90º - 41º = 49º$$

Hipotenusa kalkulatzeko:

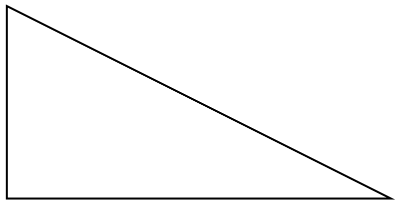
$$\sin 41º = \frac{b}{a} \Rightarrow \sin 41º = \frac{4}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{\sin 41º} \Rightarrow a = \frac{4}{0{,}65606} \Rightarrow a = 6{,}097 m$$

c katetoa kalkulatzeko:

$$\text{tg } 41º = \frac{b}{c} \Rightarrow \text{tg } 41º = \frac{4}{c} \Rightarrow c = \frac{4}{\text{tg } 41º} \Rightarrow c = \frac{4}{0{,}86929} \Rightarrow c = 4{,}601 m$$

d) Bi katetoak emanda:

Irudiko triangelu zuzenean katetoak b = 9 m eta c = 12 m direla jakinda, kalkulatu beste elementuak:



Hipotenusa kalkulatzeko:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9^2 + 12^2$$

$$a^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow a = \sqrt{225} = 15m$$

α angelua kalkulatzeko:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c} = \frac{9}{12} = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 36{,}87^{\circ} \qquad \text{orduan,} \quad \beta = 90^{\circ} - 36{,}87^{\circ} = 53{,}13^{\circ}$$

ARIKETAK

1. Kalkulatu triangelu zuzen baten hipotenusa, kateto bat b = 7 cm eta angelu zorrotz bat α = 42º direla jakinik.
2. Kalkulatu triangelu zuzen baten b katetoa, hipotenusa a = 7 cm eta angelu zorrotz bat α = 70º direla jakinik.
3. Kalkulatu triangelu zuzen baten β angelua, hipotenusa a = 9 cm eta kateto bat b = 4 cm direla jakinik.
4. Angelu zuzena duen triangelu batean, honako datuok dakizkigu: β angelua 80º-koa dela, eta 13 zentimetro hipotenusaren luzera. Kalkula itzazu gainerako angeluen eta aldeen balioak.
5. Angelu zuzena duen triangelu batean, honako datuok dakizkigu: β angelua 65º-koa dela, eta 10 zentimetro beraren aurkako katetoaren luzera. Kalkula itzazu gainerako angeluen eta aldeen balioak.
6. Angelu zuzena duen triangelu batean, honako datuok dakizkigu: α angelua 53º-koa dela, eta 15 zentimetro beraren alboko katetoaren luzera. Kalkula itzazu gainerako angeluen eta aldeen balioak.
7. Angelu zuzena duen triangelu batean, honako datuok dakizkigu: β angelua 65º-koa dela, eta 10 zentimetro beraren aurkako katetoaren luzera. Kalkula itzazu gainerako angeluen eta aldeen balioak.
8. Triangelu angeluzuzen baten hipotenusak 13 zentimetro ditu, eta katetoetako batek, 5 zentimetro. Kalkula itzazu gainerako elementuen balioak.
9. Triangelu angeluzuzen baten katetoen neurriak ezagunak ditugu: 8 eta 6 zentimetro. Kalkula itzazu gainerako elementuen balioak.
10. Kalkulatu triangelu isoszele baten angelu desberdina, aldeak 6, 4 eta 4 cm luze direla jakinik.